

6ο Κριτήριο αξιολόγησης στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου**Διάρκεια: 45 min****Ύλη έως όριο στο άπειρο****Θέμα Α****A)** Να υπολογίσετε καθένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^2 + 3x - \frac{3x^2 + 5}{x-1} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x - x^2| - |3x + 5|}{2 - |x^2 - x - 2|}$

B) Να υπολογίσετε καθένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 5} - 2x \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + x + 5} - 4x \right)$

Γ) Να υπολογίσετε καθένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sigma \upsilon \nu x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5^{x+1}}{2e^x - 2^{2x+3}}$

3 + 3 + 4 = 10 μονάδες

Θέμα Β

Να υπολογίσετε καθένα από τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - x + 2}{x + 3}$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[5]{x^4 - 3}}$

4 μονάδες

Θέμα Γ**A)** Να υπολογίσετε καθένα από τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 1)x^2 - \lambda x + 1}{(\lambda - 2)x - 5}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x + e^{x+2}}{e^x + \lambda^{x+2}}$ αν $\lambda > 0$.

B) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \alpha x + \beta \right) = 3$.

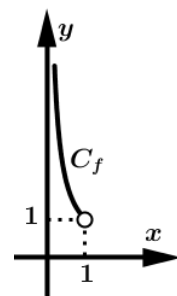
3 + 2 = 5 μονάδες

Θέμα Δ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντιστρέψιμης συνάρτησης

 $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.

1 μονάδα

**Εύχομαι κάθε επιτυχία!**
Νίκος Τούντας**Χρήσιμες οδηγίες:**

- Η συνολική βαθμολογία είναι στις 20 μονάδες
 - Διαβάστε καλά κάθε ερώτημα
 - Προτεινόμενος χρόνος: Θέμα Α: 15 min / Θέμα Β: 5 min / Θέμα Γ: 20 min / Θέμα Δ: 5 min
- Αν δεν μας βγαίνει ένα ερώτημα προχωράμε στο επόμενο, δεν αφιερώνουμε περισσότερο χρόνο.
Αν περισσέψει χρόνος επιστρέφουμε πίσω.

Λύσεις

Θέμα Α

$$\begin{aligned}
 \text{A) i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^2 + 3x - \frac{3x^2 + 5}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2(x-1) + 3x(x-1) - 3x^2 - 5}{x-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 3x - 3x^2 - 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty.
 \end{aligned}$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ άρα $x - x^2 < 0$, $3x + 5 < 0$ και $x^2 - x - 2 > 0$ σε περιοχή του $-\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x - x^2| - |3x + 5|}{2 - |x^2 - x - 2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3x + 5}{-x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\begin{aligned}
 \text{B) i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x + 5} - 2x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2 \right) \right] = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{16x^2 + x + 5} - 4x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{16x^2 + x + 5} - 4x)(\sqrt{16x^2 + x + 5} + 4x)}{\sqrt{16x^2 + x + 5} + 4x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x^2 + x + 5 - 16x^2}{\sqrt{x^2 \left(16 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)}{x \left(\sqrt{16 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} + 4 \right)} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Γ) i. Έστω $\frac{1}{x} = \omega \Leftrightarrow x = \frac{1}{\omega}$, όταν $x \rightarrow +\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \eta \mu \omega = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \omega}{\omega} = 1.$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sigma \upsilon \nu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 + \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x} \right) \right] = +\infty$ γιατί για $x \in (0, +\infty)$, έχουμε:

$$\left| \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma \upsilon \nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ από το κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x} = 0$.

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5^{x+1}}{2 \cdot e^x - 2^{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 5^x}{2 \cdot e^x - 2^3 \cdot (2^2)^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 5^x}{2 \cdot e^x - 8 \cdot 4^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x \left[3 - 5 \left(\frac{5}{4} \right)^x \right]}{e^x \left[2 - 8 \left(\frac{4}{e} \right)^x \right]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\left(\frac{4}{e} \right)^x \left[3 - 5 \left(\frac{5}{4} \right)^x \right]}{2 - 8 \left(\frac{4}{e} \right)^x} \right] = 0, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{e} \right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 5 \left(\frac{5}{4} \right)^x}{2 - 8 \left(\frac{4}{e} \right)^x} = \frac{3}{2}.$$

Θέμα Β

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - x + 2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} - x + 2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{(-x)^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} - x + 2}{x+3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt[3]{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} - x + 2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-\sqrt[3]{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} - 1 + \frac{2}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = -1 \text{ επειδή για } x \text{ σε περιοχή του } -\infty \text{ είναι}$$

$$x^3 < 0 \text{ και } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} < 0 \text{ τότε } \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} = \sqrt[3]{(-x)^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \sqrt[3]{(-x)^3} \sqrt[3]{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} = -x \sqrt[3]{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+2} - \sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[5]{x^4-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(8 + \frac{2}{x^3} \right)} - \sqrt[4]{x^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt[5]{x^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^5} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt[3]{8 + \frac{2}{x^3}} - |x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt[3]{8 + \frac{2}{x^3}} - x \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt[3]{8 + \frac{2}{x^3}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^5}} \right)} = \frac{\sqrt[3]{8} - 0}{\sqrt{1} + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Θέμα Γ

$$\text{A) i. } L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda-1)x^2 - \lambda x + 1}{(\lambda-2)x - 5} \text{ και έχουμε τις εξής περιπτώσεις:}$$

$$\bullet \text{ Av } \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1: L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{-x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

$$\bullet \text{ Av } \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2: L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-5} = -\infty$$

$$\bullet \text{ Av } \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2 \text{ δηλαδή } \lambda \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \text{ τότε:}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda-1)x^2}{(\lambda-2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda-1)x}{(\lambda-2)}$$

$$\text{➤ Av } \frac{\lambda-1}{\lambda-2} < 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 2) \text{ τότε } L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\lambda-1)x}{(\lambda-2)} = +\infty$$

➤ Αν $\frac{\lambda-1}{\lambda-2} > 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ τότε $L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda-1)x}{(\lambda-2)} = -\infty$

ii. Για $\lambda > 0$ είναι $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x + e^{x+2}}{e^x + \lambda^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x + e^2 e^x}{e^x + \lambda^2 \lambda^x}$ και έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

• Αν $0 < \lambda < e$, τότε $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left[e^2 + \left(\frac{\lambda}{e} \right)^x \right]}{e^x \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{\lambda}{e} \right)^x \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2 + \left(\frac{\lambda}{e} \right)^x}{1 + \lambda^2 \left(\frac{\lambda}{e} \right)^x} = \frac{e^2 + 0}{1 + \lambda^2 \cdot 0} = e^2$

• Αν $\lambda > e$ τότε $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x \left[e^2 \left(\frac{e}{\lambda} \right)^x + 1 \right]}{\lambda^x \left[\left(\frac{e}{\lambda} \right)^x + \lambda^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2 \left(\frac{e}{\lambda} \right)^x + 1}{\left(\frac{e}{\lambda} \right)^x + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

• Αν $\lambda = e$ τότε $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^2 e^x}{e^x + e^2 e^x} = 1$

Β) Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in (-\infty, 0)$: $f(x) = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} + \alpha x + \beta = -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + \alpha x + \beta = x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right) = \alpha - 1$, οπότε:

• Αν $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

• Αν $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα για να είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ πρέπει $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Τότε: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + \beta = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} + \beta =$

$= \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - x} + \beta = \frac{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} + \beta$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 + \beta$ οπότε $-1 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 4$.

Θέμα Δ

Λόγω συμμετρίας της C_f με την $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$

έχουμε το διπλανό σχήμα.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 0$.

